TEMA:
"Impactos das Políticas Nacionais de Formação de Professores que Ensinam Matemática no Tocantins: reflexões, desafios e proposições"

Os números repunidades generalizados no ensino médio: proposta de atividades

César Santos Bezerra
Universidade Federal do Tocantins
cesar.santos@uft.edu.br

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
eudes@uft.edu.br

GD01. Licenciatura em Matemática e os conhecimentos próprios da docência

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividades para o ensino médio acerca dos números *repunidades generalizadas,* que são números monodígitos formados pela repetição do algarismo um (1) em uma base b > 1 qualquer. Entendemos ser possível trabalharmos um ensino de matemática por meio de subconjuntos dos naturais em áreas como tecnologia e criptografia, esperamos despertar interesse e curiosidade nos estudantes, para tal, apresentamos uma proposta para o ensino de matemática utilizando o subconjunto numérico das *repunidades*. São aventados cinco problemas com aplicações de conceitos tais como: número quadrado perfeito e número de Fermat, função exponencial, função logarítmica. Estes pautados pela metodologia de resolução de problemas de Polya, tendo como estrutura de formulação e de resolução. O propósito dessas atividades é proporcionar aos estudantes da educação básica o desenvolvimento das habilidades apregoadas na Base Nacional Comum Curricular. A proposta que expomos aqui é um recorte do estudo e pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso do primeiro autor.

Palavras-chave: Repunidades Generalizadas; Metodologia de Resolução de Problemas; Base Nacional Comum Curricular.

1 Introdução

Os números repunidades, em inglês *repunits* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos inteiros não negativos, estes apresentam uma sequência padrão e algumas propriedades bem definidas as quais aguçam o interesse de matemáticos no transcorrer da história. Os estudos iniciais sobre esse subconjunto ocorreram no sistema de numeração decimal, mas posteriormente houve uma generalização.

A generalização dos números repunidades foi proposta por Snyder (1982, p.465), para todo $n \in N^*$, temos que $(R_n)\_b = \frac{b^n - 1}{b-1} = (11 \cdots 11)\_b$. Snyder (1982) também determinou algumas propriedades aritméticas desse subconjunto para qualquer base numérica $b > 1$.

É de suma importância que os estudantes também dominem o conhecimento matemático sobre bases numéricas que não a decimal, pois a história nos mostra que desde a antiguidade os humanos utilizam sistemas de numeração diferentes do decimal. Sobre a utilização de diferentes sistemas de numeração na antiguidade podemos dizer:

> Contudo, para não passar a falsa impressão de que esses povos adotaram, cada um deles, um único sistema de numeração imutável, é preciso dizer que, com o passar do tempo, assim como os hábitos e a cultura dos povos se modificam, também a maneira pela qual esses povos representaram os números modificou-se. (RODRIGUES; DINIZ, 2015, p.580).

Com o advento da computação, que se vale do sistema de numeração binário para seu funcionamento, mostrou-se maior necessidade e interesse sobre estudos em outras bases numéricas que não a decimal. Mediante esse fato, consideramos necessário ampliar os estudos existentes sobre números repunidades em outras bases numéricas.

Para tal, apresentamos cinco atividades sobre as repunidades, tendo como trabalho motivador Toumasis (1994). Os resultados matemáticos do referido conjunto numérico obtidos em Bezerra (2022) e Costa, Santos, Bezerra (2023) foram embasadores para a criação das atividades matemáticas. Os problemas propostos possuem estrutura de formulação seguindo os preceitos da metodologia de resolução de problemas, na qual a proposta de resolução é pautada pelo método de resolução de problemas de Polya (1995), e pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) enquanto objetivos e competências a serem alcançados por meio da resolução dos problemas apresentados.

2 Resolução de Problemas

A metodologia de resolução de problemas é uma das tendências metodológicas existentes na educação matemática, sendo de extrema valia no ensino de matemática para os mais variados perfis de estudantes. Podemos confirmar sua importância no seguinte exposto:

> Daí a importância da revisão da metodologia usada em sala de aula, tendo uma solução na resolução de problemas como ferramenta aliada para instigar, motivar os alunos na busca de conhecimentos; diferentemente do que ocorre no modelo tradicional, em que a resolução de problemas é usada com o mesmo significado de exercício, de forma mecânica, simplesmente para verificação e/ou memorização de fórmulas. (MEDEIROS, 2020).

Partindo deste princípio utilizamos os resultados matemáticos obtidos das repunidades para elaborar problemas embasados na metodologia de resolução de problemas com o intuito de que os mesmos se tornem motivadores para os aprendentes. Pensando no momento em qual vivenciamos na sociedade, de muito individualismo, pensamos nesta metodologia como fomentadora da colaboração entre os alunos, já que muitos problemas podem ser resolvidos por meio de discussões em grupo, troca de ideias e diferentes abordagens.

Para os problemas elaborados ou apresentados, descrevemos uma proposta de resolução pelo método de resolução de problemas de Polya (1995). Polya apresenta o método de resolução de problemas dividindo-o em quatro etapas: compreensão do problema, construção de uma estratégia, execução da estratégia e revisão da solução. No quadro abaixo são apresentadas com detalhes as descrições de cada uma destas etapas.

Quadro 1 - Etapas da Resolução de Problemas segundo Polya

Etapas	Descrições Abreviadas
1ª Etapa - Compreensão do Problema	Processo de identificação da incógnita do problema, e quais são os dados disponibilizados.
2ª Etapa - Estabelecimento de um Plano	Desenvolver uma estratégia de resolução para o problema determinado, embasada na correlação entre os dados disponibilizados e a incógnita.
3ª Etapa - Execução do Plano	Esse é o momento em que o problema é solucionado.
4ª Etapa - Retrospecto	Revisão da solução, verificar se os resultados obtidos são verdadeiros.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

A escolha por esse método parte do fato de que os estudantes poderão ser capazes de revisar e verificar suas soluções em relação à pergunta original. Eles realizarão verificações de consistência, verificando se a resposta está dentro das restrições do problema e analisaram a resolução faz sentido do ponto de vista matemático. Ainda ressaltamos que acreditamos que o método é adequado para mostrar aos estudantes que a matemática não é a resposta final de um problema, mas sim o argumento, elencando o porquê o passo a passo da resolução do mesmo.

3 Proposta de Atividades

Os problemas propostos são os expostos abaixo, sendo que o quinto e último problema contém sua resolução pelo método de resolução de problemas de Polya.

1 - Considere o número $(R_n)\_b = (11 \cdots 11)\_b = \frac{b^n - 1}{b - 1}$, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

a) Mostre que $R_{n+1} - R_n = 10^n$, para todo $n \geq 1$.

b) Mostre que $(R_{n+1})\_b - (R_n)\_b = b^n$.

2 - Considere os números$(R_{n+2})_b = \frac{b^{2n+1} - 1}{b - 1}$ e $(R_{2n})\_b = \frac{b^{2n} - 1}{b - 1}$, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

a) Mostre que $R_{2n+1} - R_{2n}$ é um quadrado perfeito, para todo $n \geq 1$.

b) Mostre que $(R_{2n+1})\_b - (R_{2n})\_b$ é um quadrado perfeito, para todo $b > 1$ e $n \geq 1$.

3 - Mostre que qualquer repunidade pode ser escrita como a soma de dois inteiros consecutivos, se sua base é par.

4 - Considere os números $(R_n)\_b = \frac{b^n-1}{b-1}$ e $(R_{n+1})\_b = \frac{b^{n+1}}{b-1}$, para todo $b > 1$ e $n > 0$.

a) Mostre que $log\, log\, (R_{n+1} - R_n) = n$, para todo $n > 0$.

b) Mostre que $(R_{n+1} - R_n)\_b = n$, para todo $b > 1$ e $n > 0$.

5 - Seja $(R_2)\_b$, determinar b, tal que $(R_2)\_b$ seja um número de Fermat na base decimal.

Uma proposta de resolução:

1ª Etapa - Compreensão do Problema

* O que devemos mostrar? Qual é a incógnita?

Devemos mostrar que $(R_2)\_b$ é um número de Fermat na base decimal.

* Quais são os dados?

$F_n = 2^{2^n} + 1$ e $(R_2)\_b$, para $b > 1$ e $n \geq 0$.

* Qual é a condicionante?

Os números de Fermat obtidos da relação com $(R_2)\_b$.

2ª e 3 Etapas - Estabelecimento e Execução do Plano

Como $(R_2)\_b = (11)\_b = 1 \cdot b + 1$, queremos determinar b, tal que $1 \cdot b + 1 = 1 \cdot 2^{2^n} + 1$.

4ª Etapa - Retrospecto

Portanto, concluímos que a única solução possível é a base $b = 2^{2^n}$, para todo $n \geq 0$.

A resolução dos demais problemas foram discutidas e apresentadas em Bezerra (2022).

4 Considerações Finais

Os estudantes ao enfrentar os problemas sobre as repunidades, orientados pelo docente no método de resolução de problemas de Polya, espera-se que eles aprimorem suas habilidades matemáticas, tornem-se solucionadores de problemas mais eficientes e desenvolvam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Além disso, espera-se que eles sejam capazes de aplicar essas habilidades de resolução de problemas em diversas situações do mundo real, aumentando sua confiança e competência em matemática. A apresentação deste estudo mostra como a pesquisa em matemática pura pode ser aplicada em prol do ensino de matemática na educação básica, ressaltando o papel crucial desta tendência metodológica no ensino de matemática na formação de professores que ensinam matemática, pois proporciona irem além da simples transmissão de conteúdo e cultivarem uma abordagem mais eficaz e envolvente no ensino. Tal estudo foi fundamental na formação docente do primeiro autor, e hoje sua prática enquanto professor do ensino fundamental é pautada por estes princípios.

5 Referências

BEZERRA, César Santos. **Os números repunidades na base b**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins, Arraias. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Escrever o número 111... 111 como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, v. 87, p. 15-19, 2015.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio; BEZERRA, Cesar Santos. Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 37-47, 2023.

COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020.

MEDEIROS, Davison Machado. A resolução de problemas como ferramenta metodológica no ensino de Matemática e Física. **Revista Educação Pública**, v. 20, nº 30, 11 de agosto de 2020. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/30/a-resolucao-de-problemas-como-ferramenta-metodologica-no-ensino-de-matematica-e-fisica.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas** : um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1995, 196p. Título original : "How to Solve It"A New Aspect of Mathematical Method.

RODRIGUES, A. E. A.; DINIZ, H. A. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 578–591, 2015.

SNYDER, W. Factoring repunits. **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 89, n. 7, p. 462–466, 1982.

TOUMASIS, Charalampos. Exploring Repunits. **School Science and Mathematics**, v.94, n.3, p.142-145, 1994.